ISEC Lisboa

Licenciatura em Ciências Aeronáuticas e do Espaço

Ciência de Dados no Aeroespacial

isec lisboa
ESCOLA
DE GESTÃO,
ENGENHARIA
E AERONÁUTICA

Preparação para a 1ª Frequência

Nome: **Número de estudante:**

Durante o teste, use $n = \left\lceil \sqrt{\text{Número de estudante}} \right\rceil =$

1. Considere dois eventos relacionados com a aviação onde A representa a ocorrência de um atraso no voo devido ao mau tempo, e B representa a ocorrência de um atraso no voo devido a problemas operacionais. Sabendo que $P(A) = 0.02$, $P(B) = p$, e $P(A \cup B) = 0.05$, para que valores de p os eventos A e B:

(a) são mutuamente exclusivos?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ P(B) &= P(A \cup B) - P(A) \\ p &= 0.03 \end{aligned}$$

(b) são independentes?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ 0.05 &= 0.02 + p - 0.02p \\ p &\approx 0.03 \end{aligned}$$

2. O gabiente de operações de uma companhia aérea está a preparar o calendário para uma determinada rota, tendo disponíveis 10 pilotos e 53 comissários de bordo. É importante mencionar que 3 dos pilotos não estão certificados a desempenhar a função de comandante da aeronave. Sabendo que são necessários 2 pilotos e 4 comissários de bordo:

(a) Quantas tripulações (válidas para voo) podem ser indicadas nestas condições? Considere que uma tripulação é considerada válida quando existe pelo menos um piloto certificado a desempenhar a função de comandante.

$$C(7,2) \times C(53,4) + C(7,1) \times C(3,1) \times C(53,4) = 12298650$$

(b) Qual a probabilidade do gabinete de operações sugerir uma tripulação que não está autorizada a voar?

$$P = \frac{C(3,2) \times C(53,4)}{C(10,2) \times C(53,4)} = 1/15$$

(c) Sabendo que o primeiro piloto selecionado não pode desempenhar a função de comandante, qual a probabilidade de a tripulação estar autorizada a voar?

V : Tripulação autorizada a voar.

C : Primeiro piloto pode desempenhar função de comandante na tripulação.

$$P(V|\overline{C}) = \frac{P(V \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{3/10 \times 7/9}{3/10 \times 7/9 + 3/10 \times 2/9} = 7/9$$

ou

$$P = \frac{C(7,1)}{C(9,1)} = 7/9$$

3. Um aeroporto possui duas pistas, 02 & 20, cada uma com, respetivamente, 5 (SID1-1, SID1-2, SID1-3, SID1-4, SID1-5) e 7 (SID2-1, SID2-2, SID2-3, SID2-4, SID2-5, SID2-6, SID2-7) padrões de saída. Num determinado momento do dia, o CTA tem de autorizar 5 aeronaves para descolagem.

(a) De quantas formas pode o grupo de 5 aeronaves partir do aeroporto?

$$(1 \times 5 + 1 \times 7)^5$$

(b) Qual a probabilidade de uma aeronave descolar seguindo um dos três primeiros padrões de saída de cada pista, sabendo que a probabilidade de utilizar a pista 02 é de 67%?

$$P(A) = \sum_i P(A|P_i)P(P_i) = \frac{3}{5} \times 0.67 + \frac{3}{7} \times (1 - 0.67) \approx 0.54$$

(c) Sabendo que o vento está no sentido norte-sul (só a pista 02 está em uso), qual a probabilidade de a aeronave seguir o padrão SID1-3?

$$P = 1/5$$

(d) Num determinado momento do dia, a probabilidade de utilizar a pista 20 é de 80%. Qual a probabilidade de pelo menos uma aeronave seguir o padrão SID2-3, sabendo que dois dos restantes padrões da pista 20 estão inoperacionais devido a um incêndio florestal?

$$X: \text{ Número de aeronaves que seguem o padrão SID2-3.}$$
$$X \sim B(5, p)$$

$$A: \text{ Aeronave segue o padrão SID2-3.}$$
$$B: \text{ Aeronave utiliza a pista 02.}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1 \times P(A)}{0.8} \Leftrightarrow P(A) = 0.16$$

$$P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{5} C(5,i)p^i(1-p)^{n-i} \approx 0.58$$

4. Num hangar de manutenção de aeronaves, a ocorrência de um defeito em certos equipamentos, impõe riscos à segurança e causa grandes prejuízos. Considere que a probabilidade de ocorrência desse defeito é 0.05. Para a deteção do defeito, é realizado um teste muito simples, no entanto, este apresenta probabilidades significativas de conduzir a conclusões erradas. Assim, cerca de 5% das vezes o teste indica a existência de defeito se não houver defeito e cerca de 3% das vezes indica a ausência de defeito se houver defeito.

(a) Qual a probabilidade de obter-se uma conclusão incorreta?

$$\begin{aligned} P(T^+ \cap \overline{D}) + P(T^- \cap D) &= P(T^+|\overline{D})P(\overline{D}) + P(T^-|D)P(D) \\ &= 0.05 \times 0.95 + 0.03 \times 0.05 \\ &\approx 0.049 \end{aligned}$$

(b) Determine a probabilidade de o teste indicar a existência de defeito.

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+|D)P(D) + P(T^+|\overline{D})P(\overline{D}) \\ &= 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 \\ &= 0.096 \end{aligned}$$

(c) São comercializados conjuntos de 18 dos componentes inspecionados. Qual a probabilidade de, num determinado conjunto, pelo menos três componentes apresentarem defeito?

$$X: \text{ Número de componentes com defeito.}$$
$$X \sim B(18, 0.05)$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{18} C(18, i)p^i(1-p)^{n-i} \approx 0.06$$

(d) A venda de cada conjunto referido na alínea anterior para o mercado é feita com um lucro Y, que é função de vários fatores, entre os quais o número de componentes defeituosos. Com o objetivo de simplificar os cálculos, considere constante o efeito de todos os outros fatores, sendo o lucro dado pela relação

$$Y = 3 - X,$$

onde X é o número de componentes defeituosos em cada conjunto.

i. Determine μ_Y e σ_Y.

$$\mu_Y = E[3 - X] = 3 - E[X] = 3 - 18 \times 0.05 = 2.1$$
$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(3 - X) = \text{Var}(X) = 18 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 0.855$$
$$\sigma_Y = 0.925$$

ii. Determine a probabilidade de um conjunto não dar prejuízo.

$$P(Y \geq 0) = P(3 - X \geq 0) = P(X \leq 3)$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} C(18, i)p^i(1-p)^{n-i} \approx 0.99$$

5. Considere a função real de variável real que representa a densidade de probabilidade da altitude de uma aeronave em relação ao solo dada por:

$$f(h) = ke^{-|h|}, \quad k \in \mathbb{R},\, h \in \mathbb{R},$$

onde h é a altitude (em metros) e k é uma constante.

(a) Determine o valor de k de modo que $f(h)$ seja uma função densidade de probabilidade válida para a altitude h.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-|h|}\, \mathrm{d}h &= 1 \\ k\left(\int_{-\infty}^{0} e^{h}\, \mathrm{d}h + \int_{0}^{+\infty} e^{-h}\, \mathrm{d}h\right) &= 1 \\ k\left(\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{h}\, \mathrm{d}h + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-h}\, \mathrm{d}h\right) &= 1 \\ k\left(\lim_{a \to -\infty} \left[e^{h}\right]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-h}\right]_0^b\right) &= 1 \\ k &= 1/2 \end{aligned}$$

(b) Determine a função de distribuição cumulativa da altitude h, $F(h)$.

$$F(h) = \int_{-\infty}^{x} f(h)\ \mathrm{d}h$$

Quando $h < 0$:

$$\begin{aligned} F(h) &= \int_{-\infty}^{h} f(h)\ \mathrm{d}h \\ &= \int_{-\infty}^{h} ke^{h}\ \mathrm{d}h \\ &= 1/2 \lim_{a\to-\infty} \left[e^{h}\right]_{a}^{h} = 1/2e^{h} \end{aligned}$$

Quando $h > 0$:

$$\begin{aligned} F(h) &= F(0) + \int_{0}^{h} f(h)\ \mathrm{d}h \\ &= 1/2 + \int_{0}^{h} ke^{-h}\ \mathrm{d}h \\ &= 1/2 + 1/2\left[-e^{-h}\right]_{0}^{h} = 1/2 - 1/2e^{-h} + 1/2 = 1 - e^{-h}/2 \end{aligned}$$

(c) Calcule $P(|H - E(H)| < 1)$.

$$\begin{aligned} |H - E(H)| < 1 \Leftrightarrow & H - E(H) < 1\ \wedge\ H - E(H) > -1 \\ & H < 1 + E(H)\ \wedge\ H > -1 + E(H) \end{aligned}$$

Como a função é par, $E(H) = 0$, pelo que $P(|H - E(H)| < 1) = P(-1 < H < 1)$

$$\begin{aligned} P(-1 < H < 1) &= \int_{-1}^{1} f(h)\ \mathrm{d}h \\ &= \int_{-1}^{0} 1/2e^{h}\ \mathrm{d}h + \int_{0}^{1} 1/2e^{-h}\ \mathrm{d}h \\ &= 1/2\left(\left[e^{h}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-h}\right]_{0}^{1}\right) \\ &= 1/2\left(1 - e^{-1} + (-e^{-1} + 1)\right) = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

6. Considere uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória, W, que representa a massa (em toneladas) de um Airbus A320^{neo} antes de iniciar a rolagem. Sabendo que

$$f(w) = \begin{cases} a\sqrt{w} & \text{if } 50 < w < 80, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante a.

$$\begin{aligned} \int_{50}^{80} a\sqrt{w}\ \mathrm{d}w &= 1 \\ a\left[\frac{w^{3/2}}{3/2}\right]_{50}^{80} &= 1 \\ a\left(\frac{80^{3/2}}{3/2} - \frac{50^{3/2}}{3/2}\right) &= 1 \Leftrightarrow a \approx 0.0041 \end{aligned}$$

(b) Encontre a função distribuição de probabilidade de W.

$$\begin{aligned}F(w) &= \int_{50}^{x} a\sqrt{w}\ \mathrm{d}w \\ &= 0.0041\left[\frac{w^{3/2}}{3/2}\right]_{50}^{w} \\ &= 0.0041\left(\frac{w^{3/2}}{3/2} - \frac{50^{3/2}}{3/2}\right) \\ &= 0.0027\sqrt{w^3} - 235.7\end{aligned}$$

(c) Calcule o valor de b de forma a que a probabilidade da massa da aeronave exceder b seja igual a 0.10.

$$\begin{aligned}\int_{b}^{80} a\sqrt{w}\ \mathrm{d}w &= 0.1 \\ 0.0041\left[\frac{w^{3/2}}{3/2}\right]_{b}^{80} &= 0.1 \\ 0.0041\left(\frac{80^{3/2}}{3/2} - \frac{b^{3/2}}{3/2}\right) &= 0.1 \\ b &\approx 77.2\end{aligned}$$

7. Uma companhia está a estudar a distribuição da densidade de passageiros ao longo do dia para otimizar a preparação dos voos. A densidade de passageiros em função da hora do dia, t, é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \xi(-0.25t^2 + 6t - 27) & \text{if } 6 < t < 18, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante ξ.

$$\begin{aligned}\int_{6}^{18} \xi(-0.25t^2 + 6t - 27)\ \mathrm{d}t &= 1 \\ \xi\left[-0.25\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} - 27t\right]_{6}^{18} &= 1 \\ \xi &= 1 \Bigg/ \left[-0.25\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} - 27t\right]_{6}^{18} \\ \xi &\approx 0.014\end{aligned}$$

(b) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 14 horas?

$$P(t < 14) = \int_{6}^{14} 0.014(-0.25t^2 + 6t - 27)\ \mathrm{d}t \approx 0.75$$

(c) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 15 horas, sabendo que $t > 12$ horas?

$$P(t < 15 \mid t > 12) = \frac{P(12 < t < 15)}{P(t > 12)} = \frac{\int_{12}^{15} 0.014(-0.25t^2 + 6t - 27)\ \mathrm{d}t}{\int_{12}^{18} 0.014(-0.25t^2 + 6t - 27)\ \mathrm{d}t} \approx 0.69$$

(d) Até que horas estão registados 80% dos passageiros?

$$P(T < t) = \int_{6}^{t} 0.014(-0.25t^2 + 6t - 27)\ \mathrm{d}t = 0.8 \Leftrightarrow t \approx 14.49$$

8. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) representa eventos relacionados à aviação, onde X é o número de aeronaves em operação (1, 2 ou 3) e Y é o número de pistas disponíveis no aeroporto (1, 2, 3 ou 4).

A tabela abaixo mostra a função de probabilidade conjunta dos eventos:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0.03	0.06	0.09	0.12
2	0.01	0.08	0.11	0.20
3	0.06	0.06	0.10	0.08

Com base nestes dados:

(a) Calcule as distribuições de probabilidade marginais de X (número de aeronaves em operação) e Y (número de pistas disponíveis).

$X \backslash Y$	1	2	3	4	P_X
1	0.03	0.06	0.09	0.12	0.30
2	0.01	0.08	0.11	0.20	0.40
3	0.06	0.06	0.10	0.08	0.30
P_Y	0.10	0.20	0.30	0.40	

$F_X(1) = 0.30$
$F_X(2) = 0.70$
$F_X(3) = 1.00$

$F_Y(1) = 0.10$
$F_Y(2) = 0.30$
$F_Y(3) = 0.60$
$F_Y(4) = 1.00$

(b) Qual a probabilidade de 3 pistas estarem disponíveis, sabendo que 4 aeronaves estão em operação?

$$P(X = 3 \mid Y = 4) = \frac{P(X = 3, Y = 4)}{P_Y(Y = 4)} = \frac{0.08}{0.40} = 0.2$$

(c) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique a sua resposta.

$$P(X = 2, Y = 1) = P_X(2)P_Y(1)?$$

$$0.01 = 0.40 \times 0.10?$$

As variáveis são dependentes.

(d) Calcule os valores esperados $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$.

$$E[X] = \sum_i x_i P_X(X = i)$$

$$E[X] = 1 \times 0.30 + 2 \times 0.40 + 3 \times 0.30 = 2$$

$$E[Y] = \sum_j y_j P_Y(Y = j)$$

$$E[Y] = 1 \times 0.10 + 2 \times 0.20 + 3 \times 0.30 + 4 \times 0.40 = 3$$

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= 1 \times 1 \times 0.03 + 1 \times 2 \times 0.06 + 1 \times 3 \times 0.09 + 1 \times 4 \times 0.12 \\ &= 2 \times 1 \times 0.01 + 2 \times 2 \times 0.08 + 2 \times 3 \times 0.11 + 2 \times 4 \times 0.40 \\ &= 3 \times 1 \times 0.06 + 3 \times 2 \times 0.06 + 3 \times 3 \times 0.10 + 3 \times 4 \times 0.08 \\ &= 5.9 \end{aligned}$$

(e) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\text{Corr}(X,Y)$.

$$\text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{-0.1}{\sqrt{0.60 \times 1.00}} \approx -0.13$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - E[X])(y_j - E[Y])p(x_i, y_j)\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.1$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y) = &(1-2)(1-3)0.03 + (1-2)(2-3)0.06 + (1-2)(3-3)0.09 + (1-2)(4-3)0.12 \\ &+ (2-2)(1-3)0.01 + (2-2)(2-3)0.08 + (2-2)(3-3)0.11 + (2-2)(4-3)0.20 \\ &+ (3-2)(1-3)0.06 + (3-2)(2-3)0.06 + (3-2)(3-3)0.10 + (3-2)(4-3)0.08 \\ &= -0.1\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = (1-2)^2 \times 0.30 + (2-2)^2 \times 0.40 + (3-2)^2 \times 0.30 = 0.60$$

$$\text{Var}(Y) = E[(Y - E[Y])^2]$$

$$\text{Var}(Y) = (1-3)^2 \times 0.10 + (2-3)^2 \times 0.20 + (3-3)^2 \times 0.30 + (4-3)^2 \times 0.40 = 1.00$$

9. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y), onde X é o número de voos atrasados e Y o número de voos cancelados num determinado aeroporto é dada por

$$p(x,y) = \frac{(2-x)^2 + (2-y)^5}{114}, \quad x = 0,1,2; \quad y = 0,1,2.$$

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e Y.

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
0	0.32	0.04	0.04	0.38
1	0.29	0.02	0.01	0.32
2	0.28	0.01	0.00	0.29
P_Y	0.89	0.07	0.05	

(b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?

$$P(X=2, Y=0) = P_X(2)P_Y(0)?$$

$$0.28 = 0.29 \times 0.89?$$

As variáveis são dependentes.

(c) Calcule os valores esperados $E[X]$, $E[Y]$ e $E[X\sqrt{Y}]$.

$$E[X] = \sum_i x_i P_X(X = i)$$

$$E[X] = 0 \times 0.38 + 1 \times 0.32 + 2 \times 0.29 = 0.90$$

$$E[Y] = \sum_j y_j P_Y(Y = j)$$

$$E[Y] = 0 \times 0.89 + 1 \times 0.07 + 2 \times 0.05 = 0.17$$

$$E[X\sqrt{Y}] = \sum_i \sum_j x_i \sqrt{y_j} p(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} E[X\sqrt{Y}] &= 0 \times 0 \times 0.32 + 0 \times 1 \times 0.04 + 0 \times \sqrt{2} \times 0.04 \\ &= 1 \times 0 \times 0.29 + 1 \times 1 \times 0.02 + 1 \times \sqrt{2} \times 0.01 \\ &= 2 \times 0 \times 0.28 + 2 \times 1 \times 0.01 + 2 \times \sqrt{2} \times 0.00 \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

(d) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\text{Corr}(X, Y)$.

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{-0.09}{\sqrt{0.66 \times 0.22}} \approx -0.24$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - E[X])(y_j - E[Y])p(x_i, y_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= (0 - 0.90)(0 - 0.17)0.32 + (0 - 0.90)(1 - 0.17)0.04 + (0 - 0.90)(2 - 0.17)0.04 \\ &+ (1 - 0.90)(0 - 0.17)0.29 + (1 - 0.90)(1 - 0.17)0.02 + (1 - 0.90)(2 - 0.17)0.01 \\ &+ (2 - 0.90)(0 - 0.17)0.28 + (2 - 0.90)(1 - 0.17)0.01 + (2 - 0.90)(2 - 0.17)0.00 \\ &\approx -0.09 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = (0 - 0.90)^2 \times 0.38 + (1 - 0.90)^2 \times 0.32 + (2 - 0.90)^2 \times 0.29 \approx 0.66$$

$$\text{Var}(Y) = E[(Y - E[Y])^2]$$

$$\text{Var}(Y) = (0 - 0.17)^2 \times 0.89 + (1 - 0.17)^2 \times 0.07 + (2 - 0.17)^2 \times 0.05 \approx 0.22$$

10. A função de densidade de probabilidade conjunta da posição (x, y) de uma aeronave numa região do radar é dada por

$$f(x, y) = \phi(x^2 + y^2),$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,\text{km}, 0 \leq y \leq 3\,\text{km}\}$, representa a região do radar.

(a) Determine o valor da constante ϕ.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^3 \phi(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \phi \int_0^1 \int_0^3 (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \phi \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^3\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \phi \int_0^1 \left(3x^2 + 9\right)\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \phi \left[\frac{3x^3}{3} + 9x \right]_0^1 &= 1 \\ \phi &= 1/10 \end{aligned}$$

(b) Qual o valor esperado da posição de uma aeronave?

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^3 \frac{1}{10}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{10}\left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{10}\left(3x^2+\frac{3^3}{3}\right) \\ &= \frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{1}{10}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}+y^2\right) \\ &= \frac{1}{30}+\frac{y^2}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x\left(\frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3x^3}{30}+\frac{9x^2}{20}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{10}+\frac{9}{20}\approx 0.55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^3 y\left(\frac{1}{30}+\frac{y^2}{10}\right)\ \mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{y^2}{60}+\frac{y^3}{30}\right]_0^3 \\ &= \frac{9}{60}+\frac{27}{30}\approx 1.05 \end{aligned}$$

(c) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região

$$R_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 0.5\,\mathrm{km}, 0\le y\le 0.5\,\mathrm{km}\}?$$

$$P((x,y)\in R_1) = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5}\frac{1}{10}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \approx 0.004$$

(d) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região R_1, sabendo que $y > 0.2$ km?

$$P((x,y)\in R_1 \mid y>0.2) = \frac{P((x,y)\in R_1\cap y>0.2)}{P(y>0.2)} = \frac{\int_0^{0.5}\int_{0.2}^{0.5}\frac{1}{10}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x}{\int_{0.2}^{3}\frac{1}{30}+\frac{y^2}{10}\ \mathrm{d}y}\approx 0.003$$

(e) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-0.045}{\sqrt{0.085\times 1.695}}\approx -0.12$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\ &= \int_0^1\int_0^3 (x-E[X])(y-E[Y])f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\int_0^3 (x-0.55)(y-1.05)\frac{1}{10}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\ &\approx -0.045 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[(X-E[X])^2] \\ &= \int_0^1 (x-0.55)^2\left(\frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10}\right)\ \mathrm{d}x \\ &\approx 0.085 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E[(Y-E[Y])^2] \\ &= \int_0^3 (y-1.05)^2\left(\frac{1}{30}+\frac{y^2}{10}\right)\ \mathrm{d}y \\ &\approx 1.695 \end{aligned}$$

11. Após a chegada de uma aeronave a uma porta de embarque, é esperado que esta ocupe a porta durante 40 minutos com um desvio padrão de 5 minutos. Após reboque (*pushback*), os dados indicam que a fase de táxi dura em média 7 minutos com uma variância de 2 minutos^2. Qual é o valor esperado e o desvio padrão do tempo desde que a aeronave chega à porta de embarque até estar pronta a descolar na cabeceira da pista? Assuma que os tempos que a aeronave permance na porta e na fase de táxi são independentes.

$$D = G + T$$
$$E[D] = E[G+T] = E[G] + E[Y] = 40 + 7 = 47\,\text{min}$$
$$\text{Var}(D) = \text{Var}(G+T) = \text{Var}(G) + \text{Var}(T) + \text{Cov}(G,T) = 5^2 + 2 = 27\,\text{min}^2$$
$$\sigma_D = \sqrt{7} \approx 5.20\,\text{min}$$

12. Um Airbus A321 pode transportar até 220 passageiros e 10 contentores de carga. Cada um dos passageiros faz parte de uma população com um valor esperado de massa de 82 kg e um desvio padrão de 5 kg. No que diz respeito aos contentores, dados agregados pela companhia dizem que cada contentor tem em média 1 tonelada com uma variância de 500 kg^2. Qual o valor esperado e desvio padrão para a massa de um Airbus A321 totalmente carregado?

$$T = P_1 + P_2 + \ldots + P_{220} + C_1 + C_2 + \ldots + C_{10} \neq 220P + 10C$$
$$E[T] = 220E[P] + 10E[C] = 28\,040\,\text{kg}$$
$$\text{Var}(T) = 200\text{Var}(P) + 10\text{Var}(C) \text{ (assumindo independência)}$$
$$\sigma_T = \sqrt{200 \times 5^2 + 10 \times 500} = 100\,\text{kg}$$

13. A quantidade de combustível residual de uma aeronave após a aterragem foi estimado em 8% (do seu peso). O erro de estimativa desta quantidade tem valor esperado nulo e um desvio padrão de 0.5%. O peso total da aeronave (10000 kg) foi obtido utilizando um sistema de pesagem que introduz um erro com valor esperado nulo e desvio padrão de 50 kg. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do peso da aeronave sem combustível.

$$P_V = 10000 + \delta_P - (10000 + \delta_P)(0.08 + \delta_C)$$
$$P_V = 10000 + \delta_P - 800 - 10000\delta_C - 0.08\delta_P - \delta_P\delta_C$$
$$P_V = 9200 + 0.92\delta_P - 10000\delta_C - \delta_P\delta_C$$

Linearizando em torno de $(\mu_{\delta_P}, \mu_{\delta_C})$:

$$\begin{aligned} P_V &\approx P_V(0,0) + \frac{\partial P_V}{\partial \delta_P}(0,0)(\delta_P - 0) + \frac{\partial P_V}{\partial \delta_C}(0,0)(\delta_C - 0) \\ &\approx 9200 + 0.92\delta_P - 10000\delta_C \end{aligned}$$

$$E[P_V] \approx E[9200 + 0.92\delta_P - 10000\delta_C] = 9200\,\text{kg}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(P_V) &\approx \text{Var}(9200 + 0.92\delta_P - 10000\delta_C) \\ &= \text{Var}(0.92\delta_P) + \text{Var}(10000\delta_C) \\ &= 0.92^2 \times 50^2 + 10000^2 \times 0.005^2 \\ &= 4616\,\text{kg}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{P_V} = 68\,\text{kg}$$

14. Num determinado dia, uma companhia aérea fará 12 voos para um aeroporto. Quando as condições meteorológicas são favoráveis, a probabilidade de aterragem é 0.97, no entanto, quando a meteorologia não é favorável, a probabilidade de divergir para a origem é de 70%. A realização do voo completo resulta em 500 unidades monetárias enquanto que, quando o voo diverge para a origem, a companhia incorre numa perda de 2000 unidades monetárias.

(a) Para um dia com metereologia favorável, qual a probabilidade de pelo menos um voo divergir?

$$X: \text{ Número de aeronaves que voltam à origem com metereologia favorável.}$$
$$X \sim B(12, 0.03)$$
$$P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{12} C(12, i) p^i (1-p)^{n-i} \approx 0.31$$

(b) Qual é o valor esperado e desvio padrão do número de voos a chegar ao destino, sabendo que a meteorologia não é favorável?

$$X: \text{ Número de aeronaves que chegam ao destino com metereologia desfavorável.}$$
$$X \sim B(12, 0.30)$$
$$E[X] = 12 \times 0.30 = 3.6 \text{ aeronaves}$$
$$\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{12 \times 0.3 \times 0.7} = 2.5 \text{ aeronaves}$$

(c) Qual é a probabilidade da companhia obter lucro num dia com metereologia não favorável?

$$X: \text{ Número de aeronaves que chegam ao destino com metereologia desfavorável.}$$
$$X \sim B(12, 0.30)$$
$$R = 500X - 2000(12 - X)$$
$$P(R > 0) = P(500X - 2000(12 - X) > 0) = P(X > 9.6) = P(X \geq 10)$$
$$P(X \geq 10) = \sum_{i=10}^{12} C(12, i) p^i (1-p)^{n-i} \approx 0.00$$

(d) Qual a probabilidade da companhia terminar o dia com prejuízo, quando a metereologia é favorável?

$$X: \text{ Número de aeronaves que chegam ao destino com metereologia favorável.}$$
$$X \sim B(12, 0.97)$$
$$R = 500X - 2000(12 - X)$$
$$P(R < 0) = P(500X - 2000(12 - X) < 0) = P(X < 9.6) = P(X \leq 9)$$
$$P(X \leq 9) = \sum_{i=0}^{9} C(12, i) p^i (1-p)^{n-i} \approx 0.004$$

15. Um determinado aeroporto está várias vezes sujeito a condições metereologicas adversas. Nessas condições, um piloto no comando prossegue com a aproximação, no entanto, 46% das vezes decide borregar e prosseguir com uma nova tentativa de aproximação.

(a) Qual a probabilidade de um piloto borregar exatamente 3 vezes antes de aterrar?

$$X: \text{ Número de tentativas até aterrar.}$$
$$X \sim BN(1, 0.54) = G(0.54)$$
$$P(X = 3) = p^3 (1-p)^1 \approx 0.05$$

(b) Qual a probabilidade de um piloto borregar pelo menos 2 vezes antes de aterrar?

$$X: \text{ Número de tentativas até aterrar.}$$
$$X \sim BN(1, 0.54) = G(0.54)$$
$$P(X \geq 2) = \sum_{i=2}^{+\infty} p^i (1-p)^r = 1 - \sum_{i=0}^{1} p^i (1-p)^r \approx 0.21$$

16. Um piloto está em fase de certificação para estar autorizado a aterrar num determinado aeroporto. Admita que as tentativas de pouso nesse aeroporto são independentes e que a probabilidade de realizar um pouso com sucesso é constante e igual a 0.7.

(a) Determine a probabilidade de necessitar de menos de 3 tentativas até realizar o primeiro pouso com sucesso.

$$X: \text{ Número de tentativas até aterrar.}$$
$$X \sim BN(1, 0.70) = G(0.70)$$
$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{+\infty} p^i (1-p)^r = 1 - \sum_{i=0}^{2} p^i (1-p)^r \approx 0.03$$

(b) Determine o número esperado de tentativas até realizar dois pousos com sucesso.

$$X: \text{ Número de tentativas até aterrar.}$$
$$X \sim BN(2, 0.70)$$
$$E[X] = \frac{2(1-0.7)}{0.7} \approx 0.86$$

(c) Considerando uma sequência de 30 tentativas, estime o valor da probabilidade de realizar pelo menos 15 pousos com sucesso.

$$X: \text{ Número de pousos com sucesso.}$$
$$X \sim B(30, 0.70)$$
$$P(X \geq 15) = \sum_{i=15}^{30} C(30, i) p^i (1-p)^{n-i} \approx 0.99$$

17. Um aeroporto está a analisar as aterragens nas suas pistas. No mês passado foram registadas 1200 aterragens, de entre das quais, 5% foram identificadas como *hard landing*, sinónimo de uma aterragem com uma razão de descida superior ao esperado. Para o estudo, o aeroporto seleciona aleatoriamente uma amostra com 10 aterragens deste conjunto (sem reposição), para estudar com mais detalhe.

(a) Qual a probabilidade de que exatamente 3 das aterragens sejam uma aterragem "dura".

$$X: \text{ Número de aterragens "duras".}$$
$$X \sim H(60, 1140, 10)$$
$$P(X = 3) = \frac{C(60, 3) \times C(1140, 7)}{C(1200, 10)} \approx 0.01$$

(b) Qual a dimensão da amostra necessária para garantir que a probabilidade de pelo menos 3 das aterragens sejam "normais" é de 95%.

$$X: \text{ Número de aterragens "normais".}$$

$$X \sim H(1140, 60, n)$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{n} \frac{C(1140, i) \times C(60, n-i)}{C(1200, n)}$$

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{C(1140, i) \times C(60, n-i)}{C(1200, n)} \geq 0.95$$

Quando $n = 4$, a inequação torna-se verdadeira.

18. Num determinado aeroporto, está a ser conduzido um estudo relativo ao número de incursões em pista. Com base em dados obtidos pelo aeroporto, existe em média 2 destes eventos por mês.

(a) Qual a probabilidade de existir pelo menos 5 incidentes por ano.

$$X: \text{ Número de incursões em pista por ano.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(24)$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{+\infty} \frac{24^i e^{-24}}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{24^i e^{-24}}{i!} \approx 1.00$$

(b) Qual o número esperado de incursões num dado trimestre?

$$X: \text{ Número de incursões em pista a cada três meses.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(6)$$

$$E[X] = 6$$

19. Uma companhia aérea regista o número de falhas de diversos equipamentos na sua frota durante as suas operações. Dados históricos mostram que, em média, ocorrem duas falhas a cada 1000 horas.

(a) Qual a probabilidade de existir exatamente 3 falhas em 1000 horas de voo.

$$X: \text{ Número de falhas a cada 1000 horas de voo.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(2)$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0.18$$

(b) Qual a probabilidade de que pelo menos 1 equipamento falhe em 500 horas de voo.

$$X: \text{ Número de falhas a cada 500 horas de voo.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(1)$$

$$P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1^i e^{-1}}{i!} = 1 - \frac{1^0 e^{-1}}{0!} \approx 0.63$$

(c) Se a companhia operar por 10000 horas de voo, qual é o número esperado de falhas de equipamentos?

$$X: \text{ Número de falhas a cada 10000 horas de voo.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(20)$$

$$E[X] = 20$$

20. Uma fábrica produz pás de compressores e de turbinas para um determinado motor *turbofan*. Por dia, 500 unidades são produzidas, mas com base em dados históricos, 3 das pás não podem avançar na linha de montagem devidos a erros de manufactura.

(a) Qual a probabilidade de, num dado dia, todas as pás avançarem na linha de montagem?

$$X: \text{ Número de falhas a cada 500 unidades.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(3)$$

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} \approx 0.05$$

ou

$$X: \text{ Número de falhas num conjunto de 500 unidades.}$$

$$X \sim B(500, 0.006)$$

$$P(X = 0) = C(500, 0)p^0(1 - p)^{500} \approx 0.05$$

(b) Assumindo que a fábrica opera cinco dias por semana, qual é o número esperado de componentes com defeito numa semana?

$$X: \text{ Número de falhas a cada 500 unidades durante cinco dias.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(15)$$

$$E[X] = 15$$

ou

$$X: \text{ Número de falhas num conjunto de 2500 unidades.}$$

$$X \sim B(2500, 0.006)$$

$$E[X] = 2500 \times 0.006 = 15$$

(c) Qual a probabilidade de, numa semana, no máximo 10 das pás apresentam defeito?

$$X: \text{ Número de falhas a cada 500 unidades durante cinco dias.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(15)$$

$$P(X \leq 10) = \sum_{i=0}^{10} \frac{15^i e^{-15}}{i!} \approx 0.12$$

ou

$$X: \text{ Número de falhas num conjunto de 2500 unidades.}$$

$$X \sim B(2500, 0.006)$$

$$P(X \leq 10) = \sum_{i=0}^{10} C(2500, i)p^i(1 - p)^{n-1} \approx 0.12$$

(d) Sabendo que a fábrica ganha por cada pá 400 unidades monetárias e perde 25 unidades monetárias por cada pá com falha, qual o lucro anual esperado para turbinas compostas por 40 pás?

$$X: \text{ Número de falhas para um estágio de turbina durante um ano.}$$

$$X \sim \text{Poisson}(57.6)$$

$$3 \rightarrow 500$$

$$f_t \rightarrow 40$$

$$f_t = 0.24 \text{ falhas por turbina por dia}$$

$$0.24 \rightarrow 1$$

$$f_{t_a} \rightarrow 240 \text{ dias úteis}$$

$$f_{t_a} = 57.6 \text{ falhas por turbina por ano}$$

$$L = 400(3000 - X) - 25X$$

$$E[L] = E[400(3000 - X) - 25X] = 200000 - 400 \times 57.6 - 25 \times 57.6 = 175520$$

21. Uma frota de aeronaves militares que opera continuamente, apresenta em média três falhas técnicas por dia. Para efeitos práticos, podemos considerar que as falhas são eventos independentes e instantaneamente resolvidos. Se uma base aérea estiver a operar simultaneamente 11 aeronaves desse tipo, calcule:

(a) A probabilidade de ocorrerem exatamente 3 falhas técnicas entre as 12h45 e as 13h30.

$$X: \text{ Número de falhas técnicas por dia para as 11 aeronaves.}$$
$$X \sim \text{Poisson}(33)$$

$$Y: \text{ Número de falhas técnicas a cada 45 minutos para as 11 aeronaves.}$$
$$Y \sim \text{Poisson}(1.03)$$

$$P(X = 3) = \frac{1.03^3 e^{-1.03}}{3!} \approx 0.07$$

(b) O valor esperado e a variância do número total de falhas técnicas por hora.

$$X: \text{ Número de falhas técnicas por hora para as 11 aeronaves.}$$
$$X \sim \text{Poisson}(33/24)$$

$$E[X] = 1.38$$
$$\text{Var}(X) = 1.38$$