

---

**ISEC Lisboa**  
**Licenciatura em**  
**Ciências Aeronáuticas e do Espaço**  
**Ciência de Dados no Aeroespacial**



---

**Preparação para a 1ª Frequência**

---

**Nome:**

**Número de estudante:**

---

Durante o teste, use  $n = \lceil \sqrt{\text{Número de estudante}} \rceil =$

---

1. Considere dois eventos relacionados com a aviação onde  $A$  representa a ocorrência de um atraso no voo devido ao mau tempo, e  $B$  representa a ocorrência de um atraso no voo devido a problemas operacionais. Sabendo que  $P(A) = 0.02$ ,  $P(B) = p$ , e  $P(A \cup B) = 0.05$ , para que valores de  $p$  os eventos  $A$  e  $B$ :
  - (a) são mutuamente exclusivos?
  - (b) são independentes?
  
2. O gabinete de operações de uma companhia aérea está a preparar o calendário para uma determinada rota, tendo disponíveis 10 pilotos e 53 comissários de bordo. É importante mencionar que 3 dos pilotos não estão certificados a desempenhar a função de comandante da aeronave. Sabendo que são necessários 2 pilotos e 4 comissários de bordo:
  - (a) Quantas tripulações (válidas para voo) podem ser indicadas nestas condições? Considere que uma tripulação é considerada válida quando existe pelo menos um piloto certificado a desempenhar a função de comandante.
  - (b) Qual a probabilidade do gabinete de operações sugerir uma tripulação que não está autorizada a voar?
  - (c) Sabendo que o primeiro piloto selecionado não pode desempenhar a função de comandante, qual a probabilidade de a tripulação estar autorizada a voar?
  
3. Um aeroporto possui duas pistas, 02 & 20, cada uma com, respetivamente, 5 (SID1-1, SID1-2, SID1-3, SID1-4, SID1-5) e 7 (SID2-1, SID2-2, SID2-3, SID2-4, SID2-5, SID2-6, SID2-7) padrões de saída. Num determinado momento do dia, o CTA tem de autorizar 5 aeronaves para decolagem.
  - (a) De quantas formas pode o grupo de 5 aeronaves partir do aeroporto?
  - (b) Qual a probabilidade de uma aeronave descolar seguindo um dos três primeiros padrões de saída de cada pista, sabendo que a probabilidade de utilizar a pista 02 é de 67%?
  - (c) Sabendo que o vento está no sentido norte-sul (só a pista 02 está em uso), qual a probabilidade de a aeronave seguir o padrão SID1-3?
  - (d) Num determinado momento do dia, a probabilidade de utilizar a pista 20 é de 80%. Qual a probabilidade de pelo menos uma aeronave seguir o padrão SID2-3, sabendo que dois dos restantes padrões da pista 20 estão inoperacionais devido a um incêndio florestal?
  
4. Num hangar de manutenção de aeronaves, a ocorrência de um defeito em certos equipamentos, impõe riscos à segurança e causa grandes prejuízos. Considere que a probabilidade de ocorrência desse defeito é 0.05. Para a deteção do defeito, é realizado um teste muito simples, no entanto, este apresenta probabilidades significativas de conduzir a conclusões erradas. Assim, cerca de 5% das vezes o teste indica a existência de defeito se não houver defeito e cerca de 3% das vezes indica a ausência de defeito se houver defeito.
  - (a) Qual a probabilidade de obter-se uma conclusão incorreta?
  - (b) Determine a probabilidade de o teste indicar a existência de defeito.

- (c) São comercializados conjuntos de 18 dos componentes inspecionados. Qual a probabilidade de, num determinado conjunto, pelo menos três componentes apresentarem defeito?
- (d) A venda de cada conjunto referido na alínea anterior para o mercado é feita com um lucro  $Y$ , que é função de vários fatores, entre os quais o número de componentes defeituosos. Com o objetivo de simplificar os cálculos, considere constante o efeito de todos os outros fatores, sendo o lucro dado pela relação

$$Y = 3 - X,$$

onde  $X$  é o número de componentes defeituosos em cada conjunto.

- i. Determine  $\mu_Y$  e  $\sigma_Y$ .
  - ii. Determine a probabilidade de um conjunto não dar prejuízo.
5. Considere a função real de variável real que representa a densidade de probabilidade da altitude de uma aeronave em relação ao solo dada por:

$$f(h) = ke^{-|h|}, \quad k \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R},$$

onde  $h$  é a altitude (em metros) e  $k$  é uma constante.

- (a) Determine o valor de  $k$  de modo que  $f(h)$  seja uma função densidade de probabilidade válida para a altitude  $h$ .
  - (b) Determine a função de distribuição cumulativa da altitude  $h$ ,  $F(h)$ .
  - (c) Calcule  $P(|H - E(H)| < 1)$ .
6. Considere uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória,  $W$ , que representa a massa (em toneladas) de um Airbus A320<sup>neo</sup> antes de iniciar a rolagem. Sabendo que

$$f(w) = \begin{cases} a\sqrt{w} & \text{if } 50 < w < 80, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante  $a$ .
  - (b) Encontre a função distribuição de probabilidade de  $W$ .
  - (c) Calcule o valor de  $b$  de forma a que a probabilidade da massa da aeronave exceder  $b$  seja igual a 0.10.
7. Uma companhia está a estudar a distribuição da densidade de passageiros ao longo do dia para otimizar a preparação dos voos. A densidade de passageiros em função da hora do dia,  $t$ , é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \xi(-0.25t^2 + 6t - 27) & \text{if } 6 < t < 18, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante  $\xi$ .
  - (b) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 14 horas?
  - (c) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 15 horas, sabendo que  $t > 12$  horas?
  - (d) Até que horas estão registados 80% dos passageiros?
8. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório  $(X, Y)$  representa eventos relacionados à aviação, onde  $X$  é o número de aeronaves em operação (1, 2 ou 3) e  $Y$  é o número de pistas disponíveis no aeroporto (1, 2, 3 ou 4).

A tabela abaixo mostra a função de probabilidade conjunta dos eventos:

| $X \setminus Y$ | 1    | 2    | 3    | 4    |
|-----------------|------|------|------|------|
| 1               | 0.03 | 0.06 | 0.09 | 0.12 |
| 2               | 0.01 | 0.08 | 0.11 | 0.20 |
| 3               | 0.06 | 0.06 | 0.10 | 0.08 |

Com base nestes dados:

- (a) Calcule as distribuições de probabilidade marginais de  $X$  (número de aeronaves em operação) e  $Y$  (número de pistas disponíveis).
- (b) Qual a probabilidade de 3 pistas estarem disponíveis, sabendo que 4 aeronaves estão em operação?
- (c) As variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes? Justifique a sua resposta.
- (d) Calcule os valores esperados  $E[X]$ ,  $E[Y]$  e  $E[XY]$ .
- (e) Calcule o coeficiente de correlação populacional  $\text{Corr}(X, Y)$ .

9. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório  $(X, Y)$ , onde  $X$  é o número de voos atrasados e  $Y$  o número de voos cancelados num determinado aeroporto é dada por

$$p(x, y) = \frac{(2-x)^2 + (2-y)^5}{114}, \quad x = 0, 1, 2; \quad y = 0, 1, 2.$$

- (a) Calcule as funções de probabilidade marginais de  $X$  e  $Y$ .
- (b) As variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes?
- (c) Calcule os valores esperados  $E[X]$ ,  $E[Y]$  e  $E[X\sqrt{Y}]$ .
- (d) Calcule o coeficiente de correlação populacional  $\text{Corr}(X, Y)$ .

10. A função de densidade de probabilidade conjunta da posição  $(x, y)$  de uma aeronave numa região do radar é dada por

$$f(x, y) = \phi(x^2 + y^2),$$

onde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ km}, 0 \leq y \leq 3 \text{ km}\}$ , representa a região do radar.

- (a) Determine o valor da constante  $\phi$ .
- (b) Qual o valor esperado da posição de uma aeronave?
- (c) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 0.5 \text{ km}, 0 \leq y \leq 0.5 \text{ km}\}?$$

- (d) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região  $R_1$ , sabendo que  $y > 0.2 \text{ km}$ ?
- (e) Calcule o coeficiente de correlação populacional  $\text{Corr}(X, Y)$ .

11. Após a chegada de uma aeronave a uma porta de embarque, é esperado que esta ocupe a porta durante 40 minutos com um desvio padrão de 5 minutos. Após reboque (*pushback*), os dados indicam que a fase de táxi dura em média 7 minutos com uma variância de 2 minutos<sup>2</sup>. Qual é o valor esperado e o desvio padrão do tempo desde que a aeronave chega à porta de embarque até estar pronta a descolar na cabeceira da pista? Assuma que os tempos que a aeronave permanece na porta e na fase de táxi são independentes.

12. Um Airbus A321 pode transportar até 220 passageiros e 10 contentores de carga. Cada um dos passageiros faz parte de uma população com um valor esperado de massa de 82 kg e um desvio padrão de 5 kg. No que diz respeito aos contentores, dados agregados pela companhia dizem que cada contentor tem em média 1 tonelada com uma variância de 500 kg<sup>2</sup>. Qual o valor esperado e desvio padrão para a massa de um Airbus A321 totalmente carregado?

13. A quantidade de combustível residual de uma aeronave após a aterragem foi estimado em 8% (do seu peso). O erro de estimativa desta quantidade tem valor esperado nulo e um desvio padrão de 0.5%. O peso total da aeronave (10000 kg) foi obtido utilizando um sistema de pesagem que introduz um erro com valor esperado nulo e desvio padrão de 50 kg. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do peso da aeronave sem combustível.

14. Num determinado dia, uma companhia aérea fará 12 voos para um aeroporto. Quando as condições meteorológicas são favoráveis, a probabilidade de aterragem é 0.97, no entanto, quando a meteorologia não é favorável, a probabilidade de divergir para a origem é de 70%. A realização do voo completo resulta em 500 unidades monetárias enquanto que, quando o voo diverge para a origem, a companhia incorre numa perda de 2000 unidades monetárias.

- (a) Para um dia com meteorologia favorável, qual a probabilidade de pelo menos um voo divergir?
- (b) Qual é o valor esperado e desvio padrão do número de voos a chegar ao destino, sabendo que a meteorologia não é favorável?

- (c) Qual é a probabilidade da companhia obter lucro num dia com metereologia não favorável?
- (d) Qual a probabilidade da companhia terminar o dia com prejuízo, quando a metereologia é favorável?
15. Um determinado aeroporto está várias vezes sujeito a condições metereológicas adversas. Nessas condições, um piloto no comando prossegue com a aproximação, no entanto, 46% das vezes decide borregar e prosseguir com uma nova tentativa de aproximação.
- (a) Qual a probabilidade de um piloto borregar exatamente 3 vezes antes de aterrar?
- (b) Qual a probabilidade de um piloto borregar pelo menos 2 vezes antes de aterrar?
16. Um piloto está em fase de certificação para estar autorizado a aterrar num determinado aeroporto. Admita que as tentativas de pouso nesse aeroporto são independentes e que a probabilidade de realizar um pouso com sucesso é constante e igual a 0.7.
- (a) Determine a probabilidade de necessitar de menos de 3 tentativas até realizar o primeiro pouso com sucesso.
- (b) Determine o número esperado de tentativas até realizar dois pousos com sucesso.
- (c) Considerando uma sequência de 30 tentativas, estime o valor da probabilidade de realizar pelo menos 15 pousos com sucesso.
17. Um aeroporto está a analisar as aterragens nas suas pistas. No mês passado foram registadas 1200 aterragens, de entre das quais, 5% foram identificadas como *hard landing*, sinónimo de uma aterragem com uma razão de descida superior ao esperado. Para o estudo, o aeroporto seleciona aleatoriamente uma amostra com 10 aterragens deste conjunto (sem reposição), para estudar com mais detalhe.
- (a) Qual a probabilidade de que exatamente 3 das aterragens sejam uma aterragem “dura”.
- (b) Qual a dimensão da amostra necessária para garantir que a probabilidade de pelo menos 3 das aterragens sejam “normais” é de 95%.
18. Num determinado aeroporto, está a ser conduzido um estudo relativo ao número de incursões em pista. Com base em dados obtidos pelo aeroporto, existe em média 2 destes eventos por mês.
- (a) Qual a probabilidade de existir pelo menos 5 incidentes por ano.
- (b) Qual o número esperado de incursões num dado trimestre?
19. Uma companhia aérea regista o número de falhas de diversos equipamentos na sua frota durante as suas operações. Dados históricos mostram que, em média, ocorrem duas falhas a cada 1000 horas.
- (a) Qual a probabilidade de existir exatamente 3 falhas em 1000 horas de voo.
- (b) Qual a probabilidade de que pelo menos 1 equipamento falhe em 500 horas de voo.
- (c) Se a companhia operar por 10000 horas de voo, qual é o número esperado de falhas de equipamentos?
20. Uma fábrica produz pás de compressores e de turbinas para um determinado motor *turbofan*. Por dia, 500 unidades são produzidas, mas com base em dados históricos, 3 das pás não podem avançar na linha de montagem devidos a erros de manufactura.
- (a) Qual a probabilidade de, num dado dia, todas as pás avançarem na linha de montagem?
- (b) Assumindo que a fábrica opera cinco dias por semana, qual é o número esperado de componentes com defeito numa semana?
- (b) Qual a probabilidade de, numa semana, no máximo 10 das pás apresentarem defeito?
- (d) Sabendo que a fábrica ganha por cada pá 400 unidades monetárias e perde 25 unidades monetárias por cada pá com falha, qual o lucro anual esperado para turbinas compostas por 40 pás?
21. Uma frota de aeronaves militares que opera continuamente, apresenta em média três falhas técnicas por dia. Para efeitos práticos, podemos considerar que as falhas são eventos independentes e instantaneamente resolvidos. Se uma base aérea estiver a operar simultaneamente 11 aeronaves desse tipo, calcule:
- (a) A probabilidade de ocorrerem exatamente 3 falhas técnicas entre as 12h45 e as 13h30.
- (b) O valor esperado e a variância do número total de falhas técnicas por hora.