
ISEC Lisboa
Licenciatura em
Ciências Aeronáuticas e do Espaço
Ciência de Dados no Aeroespacial



Preparação para a 1ª Época de Exames

Nome:

Número de estudante:

-
1. Considere dois eventos relacionados com a aviação onde A representa a ocorrência de um atraso no voo devido ao mau tempo, e B representa a ocorrência de um atraso no voo devido a problemas operacionais. Sabendo que $P(A) = 0.02$, $P(B) = p$, e $P(A \cup B) = 0.05$, para que valores de p os eventos A e B :
 - (a) são mutuamente exclusivos?
 - (b) são independentes?
 2. O gabinete de operações de uma companhia aérea está a preparar o calendário para uma determinada rota, tendo disponíveis 10 pilotos e 53 comissários de bordo. É importante mencionar que 3 dos pilotos não estão certificados a desempenhar a função de comandante da aeronave. Sabendo que são necessários 2 pilotos e 4 comissários de bordo:
 - (a) Quantas tripulações (válidas para voo) podem ser indicadas nestas condições? Considere que uma tripulação é considerada válida quando existe pelo menos um piloto certificado a desempenhar a função de comandante.
 - (b) Qual a probabilidade do gabinete de operações sugerir uma tripulação que não está autorizada a voar?
 - (c) Sabendo que o primeiro piloto selecionado não pode desempenhar a função de comandante, qual a probabilidade de a tripulação estar autorizada a voar?
 3. Um aeroporto possui duas pistas, 02 & 20, cada uma com, respetivamente, 5 (SID1-1, SID1-2, SID1-3, SID1-4, SID1-5) e 7 (SID2-1, SID2-2, SID2-3, SID2-4, SID2-5, SID2-6, SID2-7) padrões de saída. Num determinado momento do dia, o CTA tem de autorizar 5 aeronaves para decolagem.
 - (a) De quantas formas pode o grupo de 5 aeronaves partir do aeroporto?
 - (b) Qual a probabilidade de uma aeronave descolar seguindo um dos três primeiros padrões de saída de cada pista, sabendo que a probabilidade de utilizar a pista 02 é de 67%?
 - (c) Sabendo que o vento está no sentido norte-sul (só a pista 02 está em uso), qual a probabilidade de a aeronave seguir o padrão SID1-3?
 - (d) Num determinado momento do dia, a probabilidade de utilizar a pista 20 é de 80%. Qual a probabilidade de pelo menos uma aeronave seguir o padrão SID2-3, sabendo que dois dos restantes padrões da pista 20 estão inoperacionais devido a um incêndio florestal?
 4. Num hangar de manutenção de aeronaves, a ocorrência de um defeito em certos equipamentos, impõe riscos à segurança e causa grandes prejuízos. Considere que a probabilidade de ocorrência desse defeito é 0.05. Para a deteção do defeito, é realizado um teste muito simples, no entanto, este apresenta probabilidades significativas de conduzir a conclusões erradas. Assim, cerca de 5% das vezes o teste indica a existência de defeito se não houver defeito e cerca de 3% das vezes indica a ausência de defeito se houver defeito.
 - (a) Qual a probabilidade de obter-se uma conclusão incorreta?
 - (b) Determine a probabilidade de o teste indicar a existência de defeito.
 - (c) São comercializados conjuntos de 18 dos componentes inspecionados. Qual a probabilidade de, num determinado conjunto, pelo menos três componentes apresentarem defeito?

- (d) A venda de cada conjunto referido na alínea anterior para o mercado é feita com um lucro Y , que é função de vários fatores, entre os quais o número de componentes defeituosos. Com o objetivo de simplificar os cálculos, considere constante o efeito de todos os outros fatores, sendo o lucro dado pela relação

$$Y = 3 - X,$$

onde X é o número de componentes defeituosos em cada conjunto.

- i. Determine μ_Y e σ_Y .
 - ii. Determine a probabilidade de um conjunto não dar prejuízo.
5. Considere a função real de variável real que representa a densidade de probabilidade da altitude de uma aeronave em relação ao solo dada por:

$$f(h) = ke^{-|h|}, \quad k \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R},$$

onde h é a altitude (em metros) e k é uma constante.

- (a) Determine o valor de k de modo que $f(h)$ seja uma função densidade de probabilidade válida para a altitude h .
 - (b) Determine a função de distribuição cumulativa da altitude h , $F(h)$.
 - (c) Calcule $P(|H - E(H)| < 1)$.
6. Considere uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória, W , que representa a massa (em toneladas) de um Airbus A320^{neo} antes de iniciar a rolagem. Sabendo que

$$f(w) = \begin{cases} a\sqrt{w} & \text{if } 50 < w < 80, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante a .
 - (b) Encontre a função distribuição de probabilidade de W .
 - (c) Calcule o valor de b de forma a que a probabilidade da massa da aeronave exceder b seja igual a 0.10.
7. Uma companhia está a estudar a distribuição da densidade de passageiros ao longo do dia para otimizar a preparação dos voos. A densidade de passageiros em função da hora do dia, t , é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \xi(-0.25t^2 + 6t - 27) & \text{if } 6 < t < 18, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante ξ .
 - (b) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 14 horas?
 - (c) Qual a probabilidade de um passageiro estar registado para voar até às 15 horas, sabendo que $t > 12$ horas?
 - (d) Até que horas estão registados 80% dos passageiros?
8. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) representa eventos relacionados à aviação, onde X é o número de aeronaves em operação (1, 2 ou 3) e Y é o número de pistas disponíveis no aeroporto (1, 2, 3 ou 4).

A tabela abaixo mostra a função de probabilidade conjunta dos eventos:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0.03	0.06	0.09	0.12
2	0.01	0.08	0.11	0.20
3	0.06	0.06	0.10	0.08

Com base nestes dados:

- (a) Calcule as distribuições de probabilidade marginais de X (número de aeronaves em operação) e Y (número de pistas disponíveis).

- (b) Qual a probabilidade de 3 pistas estarem disponíveis, sabendo que 4 aeronaves estão em operação?
- (c) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique a sua resposta.
- (d) Calcule os valores esperados $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$.
- (e) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\text{Corr}(X, Y)$.

9. Considere que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) , onde X é o número de voos atrasados e Y o número de voos cancelados num determinado aeroporto é dada por

$$p(x, y) = \frac{(2-x)^2 + (2-y)^5}{114}, \quad x = 0, 1, 2; \quad y = 0, 1, 2.$$

- (a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e Y .
- (b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?
- (c) Calcule os valores esperados $E[X]$, $E[Y]$ e $E[X\sqrt{Y}]$.
- (d) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\text{Corr}(X, Y)$.

10. A função de densidade de probabilidade conjunta da posição (x, y) de uma aeronave numa região do radar é dada por

$$f(x, y) = \phi(x^2 + y^2),$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ km}, 0 \leq y \leq 3 \text{ km}\}$, representa a região do radar.

- (a) Determine o valor da constante ϕ .
- (b) Qual o valor esperado da posição de uma aeronave?
- (c) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 0.5 \text{ km}, 0 \leq y \leq 0.5 \text{ km}\}?$$

- (d) Qual a probabilidade de uma aeronave estar localizada na região R_1 , sabendo que $y > 0.2 \text{ km}$?
- (e) Calcule o coeficiente de correlação populacional $\text{Corr}(X, Y)$.

11. Após a chegada de uma aeronave a uma porta de embarque, é esperado que esta ocupe a porta durante 40 minutos com um desvio padrão de 5 minutos. Após reboque (*pushback*), os dados indicam que a fase de táxi dura em média 7 minutos com uma variância de 2 minutos². Qual é o valor esperado e o desvio padrão do tempo desde que a aeronave chega à porta de embarque até estar pronta a descolar na cabeceira da pista? Assuma que os tempos que a aeronave permanece na porta e na fase de táxi são independentes.

12. Um Airbus A321 pode transportar até 220 passageiros e 10 contentores de carga. Cada um dos passageiros faz parte de uma população com um valor esperado de massa de 82 kg e um desvio padrão de 5 kg. No que diz respeito aos contentores, dados agregados pela companhia dizem que cada contentor tem em média 1 tonelada com uma variância de 500 kg². Qual o valor esperado e desvio padrão para a massa de um Airbus A321 totalmente carregado?

13. A quantidade de combustível residual de uma aeronave após a aterragem foi estimado em 8% (do seu peso). O erro de estimativa desta quantidade tem valor esperado nulo e um desvio padrão de 0.5%. O peso total da aeronave (10000 kg) foi obtido utilizando um sistema de pesagem que introduz um erro com valor esperado nulo e desvio padrão de 50 kg. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do peso da aeronave sem combustível.

14. Num determinado dia, uma companhia aérea fará 12 voos para um aeroporto. Quando as condições meteorológicas são favoráveis, a probabilidade de aterragem é 0.97, no entanto, quando a meteorologia não é favorável, a probabilidade de divergir para a origem é de 70%. A realização do voo completo resulta em 500 unidades monetárias enquanto que, quando o voo diverge para a origem, a companhia incorre numa perda de 2000 unidades monetárias.

- (a) Para um dia com meteorologia favorável, qual a probabilidade de pelo menos um voo divergir?
- (b) Qual é o valor esperado e desvio padrão do número de voos a chegar ao destino, sabendo que a meteorologia não é favorável?
- (c) Qual é a probabilidade da companhia obter lucro num dia com meteorologia não favorável?

- (d) Qual a probabilidade da companhia terminar o dia com prejuízo, quando a meteorologia é favorável?
15. Um determinado aeroporto está várias vezes sujeito a condições meteorológicas adversas. Nessas condições, um piloto no comando prossegue com a aproximação, no entanto, 46% das vezes decide borregar e prosseguir com uma nova tentativa de aproximação.
- (a) Qual a probabilidade de um piloto borregar exatamente 3 vezes antes de aterrar?
- (b) Qual a probabilidade de um piloto borregar pelo menos 2 vezes antes de aterrar?
16. Um piloto está em fase de certificação para estar autorizado a aterrar num determinado aeroporto. Admita que as tentativas de pouso nesse aeroporto são independentes e que a probabilidade de realizar um pouso com sucesso é constante e igual a 0.7.
- (a) Determine a probabilidade de necessitar de menos de 3 tentativas até realizar o primeiro pouso com sucesso.
- (b) Determine o número esperado de tentativas até realizar dois pousos com sucesso.
- (c) Considerando uma sequência de 30 tentativas, estime o valor da probabilidade de realizar pelo menos 15 pousos com sucesso.
17. Um aeroporto está a analisar as aterragens nas suas pistas. No mês passado foram registadas 1200 aterragens, de entre das quais, 5% foram identificadas como *hard landing*, sinónimo de uma aterragem com uma razão de descida superior ao esperado. Para o estudo, o aeroporto seleciona aleatoriamente uma amostra com 10 aterragens deste conjunto (sem reposição), para estudar com mais detalhe.
- (a) Qual a probabilidade de que exatamente 3 das aterragens sejam uma aterragem “dura”.
- (b) Qual a dimensão da amostra necessária para garantir que a probabilidade de pelo menos 3 das aterragens sejam “normais” é de 95%.
18. Num determinado aeroporto, está a ser conduzido um estudo relativo ao número de incursões em pista. Com base em dados obtidos pelo aeroporto, existe em média 2 destes eventos por mês.
- (a) Qual a probabilidade de existir pelo menos 5 incidentes por ano.
- (b) Qual o número esperado de incursões num dado trimestre?
19. Uma companhia aérea regista o número de falhas de diversos equipamentos na sua frota durante as suas operações. Dados históricos mostram que, em média, ocorrem duas falhas a cada 1000 horas.
- (a) Qual a probabilidade de existir exatamente 3 falhas em 1000 horas de voo.
- (b) Qual a probabilidade de que pelo menos 1 equipamento falhe em 500 horas de voo.
- (c) Se a companhia operar por 10000 horas de voo, qual é o número esperado de falhas de equipamentos?
20. Uma fábrica produz pás de compressores e de turbinas para um determinado motor *turbofan*. Por dia, 500 unidades são produzidas, mas com base em dados históricos, 3 das pás não podem avançar na linha de montagem devidos a erros de manufactura.
- (a) Qual a probabilidade de, num dado dia, todas as pás avançarem na linha de montagem?
- (b) Assumindo que a fábrica opera cinco dias por semana, qual é o número esperado de componentes com defeito numa semana?
- (c) Qual a probabilidade de, numa semana, no máximo 10 das pás apresentam defeito?
- (d) Sabendo que a fábrica ganha por cada pá 400 unidades monetárias e perde 25 unidades monetárias por cada pá com falha, qual o lucro anual esperado para turbinas compostas por 40 pás?
21. Uma frota de aeronaves militares que opera continuamente, apresenta em média três falhas técnicas por dia. Para efeitos práticos, podemos considerar que as falhas são eventos independentes e instantaneamente resolvidos. Se uma base aérea estiver a operar simultaneamente 11 aeronaves desse tipo, calcule:
- (a) A probabilidade de ocorrerem exatamente 3 falhas técnicas entre as 12h45 e as 13h30.
- (b) O valor esperado e a variância do número total de falhas técnicas por hora.

22. Um aeroporto tem 100 aviões programados para decolar num determinado dia. Cada avião tem um tempo de espera na pista que varia entre 1 e 6 minutos. Estime a probabilidade de que o tempo total de espera seja inferior a 370 minutos.
23. É conhecido que o tempo (em minutos) entre aterragens consecutivas num determinado aeroporto segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro $\lambda = 1/7$ (ou seja, em média, ocorre uma aterragem a cada 7 minutos). Durante um determinado período, foram registados os tempos entre 540 aterragens consecutivas. Qual é a probabilidade aproximada de que a soma total destes tempos seja inferior a 3780 minutos?
24. Um teste de controlo de qualidade verifica amostras de componentes para um *flap* para determinar se estão aeronavegáveis. Cada amostra contém 20 componentes, e a probabilidade de cada componente estar válido é de 0.85. A empresa realiza 500 testes de amostras independentes ao longo de um mês. Qual é a probabilidade aproximada de que o número total de componentes válidos nestas 500 amostras seja inferior a 8300?
25. Um aeroporto internacional monitora o número de passageiros em cada voo que chega ao terminal. Dados históricos mostram que o número de passageiros por voo segue aproximadamente uma distribuição normal com média de 180 passageiros e desvio padrão de 35 passageiros. Durante a temporada alta de verão, estão programados 420 voos para chegar a este aeroporto nos próximos 30 dias. Qual é a probabilidade aproximada de que o número total de passageiros que chegarão ao aeroporto durante este período seja superior a 78000 passageiros?
26. Um sistema hidráulico crítico de uma aeronave comercial apresenta uma taxa de falha constante de λ falhas por hora de voo. Suponha que o tempo até à falha segue uma distribuição exponencial negativa da forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $\lambda > 0$.

- (a) Prove que $E[X] = 1/\lambda$ e $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.
- (b) Prove que $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro desconhecido λ , com base numa amostra aleatória simples $X_1, \dots, X_n$, onde $\bar{X}$ denota o tempo médio amostral até à falha.
- (c) Determine a função eficiência desse estimador.
- (d) Numa amostra aleatória simples de dimensão $n = 100$, obteve-se $\bar{X} = 6$. Construa um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro λ .
27. Considere que $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ são estimadores da verdadeira velocidade da perda aerodinâmica θ (medida nós) de uma aeronave de tal modo que

$$\begin{aligned} E(\hat{\Theta}_1) &= \theta & \text{Var}(\hat{\Theta}_1) &= 3 \\ E(\hat{\Theta}_2) &= 3\theta & \text{Var}(\hat{\Theta}_2) &= 1 \end{aligned}$$

Qual dos estimadores é o mais eficiente para a estimação da verdadeira velocidade de perda?

28. Uma variável aleatória segue uma distribuição de Poisson com o parâmetro $\lambda > 0$. Relembrando que, para esta distribuição,

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$, encontre a estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro λ com base na amostra $\{2, 1, 4, 4, 2\}$, onde k representa o número de aterragens num determinado aeroporto por hora.

29. Duas amostras aleatórias simples e independentes são retiradas de uma população, que consiste em componentes operacionais e com defeito de uma aeronave. Para $i = 1, 2$, considere que:

- N_i é a dimensão da amostra i ,
- X_i é o número de componentes com defeito na amostra i .

Qual dos seguintes estimadores para a proporção de componentes com defeito na população é o mais eficiente?

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1 + X_2}{N_1 + N_2} \quad \hat{P}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{N_1} + \frac{X_2}{N_2} \right)$$

30. Considere uma população finita com $N + M$ componentes, dos quais N não estão aeronavegáveis. Duas amostras aleatórias simples são retiradas desta população, sem reposição. Para $i = 1, 2$, considere que:

- n_i é a dimensão da amostra i ,
- X_i é o número de componentes com defeito na amostra i .

Qual dos seguintes estimadores para a proporção de componentes com defeito ($p = N/(N+M)$) na população é o mais eficiente?

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \quad \hat{P}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2} \right)$$

31. Considere que o consumo de combustível Y de um avião comercial segue uma distribuição normal, com média μ e um desvio padrão $\sigma = 0.5$ (em milhares de litros por hora). Uma amostra aleatória de 25 voos foi analisada, da qual resultou uma média amostral, $\bar{Y} = 4.2$ (em milhares de litros por hora).

- Calcule o intervalo de confiança (de 99%) para μ .
- A um nível de confiança de 99%, qual deverá ser a dimensão da amostra de modo a que o erro máximo, quando $\bar{Y}$ é usado como estimativa de μ , não ultrapasse 0.1 (em milhares de litros por hora)?

32. Considere que a velocidade de cruzeiro X de uma aeronave segue uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão σ , ambos desconhecidos (em nós). Uma amostra aleatória de 25 voos foi registada, da qual resultou uma média amostral $\bar{X} = 540$ nós e um desvio padrão amostral $S = 8$ nós.

- Calcule o intervalo de confiança (de 95%) para σ .
- A um nível de confiança de 95%, qual deverá ser a dimensão da amostra de modo a que a amplitude do intervalo de confiança para o desvio padrão seja no máximo 2 nós?

33. Uma companhia aérea deseja avaliar se a implementação de um novo procedimento operacional resultou em uma redução significativa no consumo médio de combustível durante voos comerciais de uma determinada rota. Historicamente, o consumo médio de combustível para voos nesta rota, realizados com aeronaves Airbus A320, é de 4200 litros por voo. Após a implementação de um novo procedimento operacional, foram registados os seguintes consumos (em litros) para 8 voos:

4100 4050 4200 4000 4150 4080 4120 4070

Com base nesses dados, teste, ao nível de significância de 5%, se o novo procedimento reduziu o consumo médio de combustível por voo.

34. Pretende-se introduzir um novo processo na fabricação de peças para aeronaves, visando reduzir a variabilidade do processo de produção. O processo atual apresenta uma variabilidade de $\sigma^2 = 15$. Como a implementação completa do novo processo implica custos elevados, decidiu-se realizar um teste com 16 peças fabricadas utilizando o novo método. A um nível de significância de 5%, e sabendo que a variância da amostra foi $S^2 = 7.2$, qual deve ser a decisão a tomar?

35. Uma empresa aérea considera que o sistema de manutenção implementado é eficiente se a probabilidade de uma aeronave estar operacional for de pelo menos 95%. Para verificar a qualidade do sistema, foi realizado um teste com 200 aeronaves, e constatou-se que 18 delas não estavam aeronavegáveis. Qual é a conclusão estatística da empresa? Justifique.

36. Um processo para determinar a frequência de operação de um equipamento de comunicação de uma aeronave resultou no seguinte conjunto de dados (em MHz):

124.95 125.00 124.98 124.97 125.01 124.99 125.02 124.96

De acordo com regulamentos presentes na aviação, a frequência de operação do equipamento não deverá apresentar um desvio padrão que ultrapasse 0.03 MHz. Acredita que a amostra recolhida permite-nos afirmar que o equipamento está de acordo com a regulamentação? Justifique a resposta, explicando as hipóteses utilizadas.

37. Um investigador pretende averiguar se uma determinada técnica de pilotagem tem como efeito secundário a redução do consumo de combustível por hora em aeronaves. Inicialmente, são efetuadas medições do consumo de combustível por hora em 15 voos sem a utilização da técnica. Após 6 meses de utilização regular da técnica, são efetuadas novas medições do consumo de combustível por hora. As medições obtidas foram:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes	70	80	72	76	76	76	76	72	82	64	74	92	74	68	84
Depois	68	72	62	70	58	66	68	52	64	72	74	60	74	72	74

Com base nos dados recolhidos, podemos afirmar, com uma confiança de 95%, que o uso desta técnica reduz o consumo de combustível por hora?

38. Pretende-se verificar se o número de incidentes registrados em uma determinada companhia aérea varia conforme o dia da semana. O número total de incidentes observados para cada dia da semana, em 3 semanas escolhidas aleatoriamente, encontra-se na seguinte tabela:

Dia da semana	Número de incidentes
segunda-feira	45
terça-feira	35
quarta-feira	44
quinta-feira	46
sexta-feira	38
sábado	32
domingo	48

39. Uma companhia aérea está a estudar o número de tentativas necessárias para que um avião consiga aterrar sem atrasos devido a condições meteorológicas adversas. Ao que tudo indica, a probabilidade de um voo aterrar sem atraso em cada tentativa é de $p = 0.63$, e que o número de tentativas até a primeira aterragem sem atraso segue uma distribuição geométrica.

- (a) Para testar esta hipótese, foram recolhidos dados de 100 voos, registrando para cada voo o número de tentativas necessárias até aterrar sem atraso. Os resultados observados foram:

Número de tentativas até sucesso	Frequência observada
1	58
2	25
3	10
4	7

- (b) Teste a hipótese de que o número de tentativas até a primeira aterragem sem atraso segue uma distribuição geométrica sabendo que

$$\hat{p} = 1/\bar{x},$$

é o estimador de máxima verossimilhança para p de uma distribuição geométrica e $\bar{x}$ é a média amostral.